

جلسه دوم محاسبه ضریب شدت تنش K برای مواد الاستیک خطی

یک ورق با ترک مرکزی به طول $2a$ مطابق شکل ۱ در نظر گرفته و با توجه به شرایط زیر آن را در نرم افزار آباکوس مدل کنید:

داده‌ها:

طول ترک a : ۱۰ میلیمتر

ابعاد ورق مربعی: ۱۰۰ میلیمتر

مدول یانگ: ۲۰۰۰۰۰ مگاپاسکال

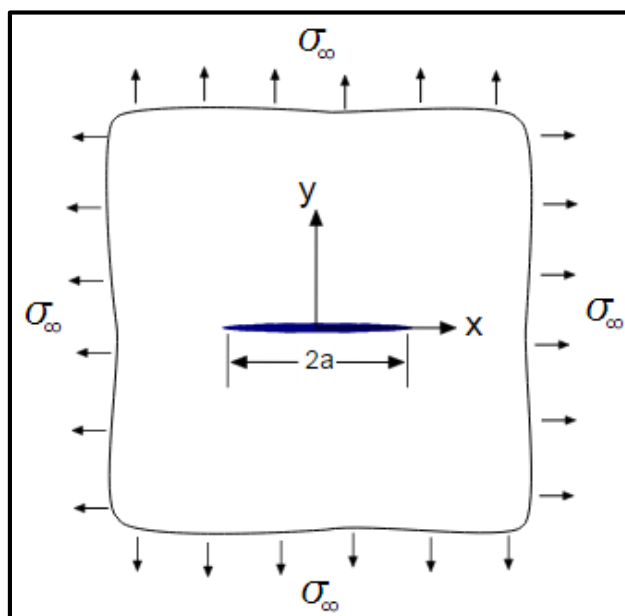
ضریب پواسون: ۰/۳

تنش در دور دست: ۱ مگاپاسکال

مطلوبست موارد زیر:

۱- محاسبه مقادیر تنش‌ها در نوک ترک و مقایسه آن‌ها با مقادیر بدست آمده از حل وسترگارد (حل تئوری)

۲- ترسیم منحنی تنش در جلو ترک



شکل ۱: هندسه ورق با ترک مرکزی

« حل تئوری »

وسترگارد برای محاسبه تنش در نزدیکی نوک ترک تابع مختلط زیر را پیشنهاد کرد:

$$Z(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad z = x + jy \quad (1)$$

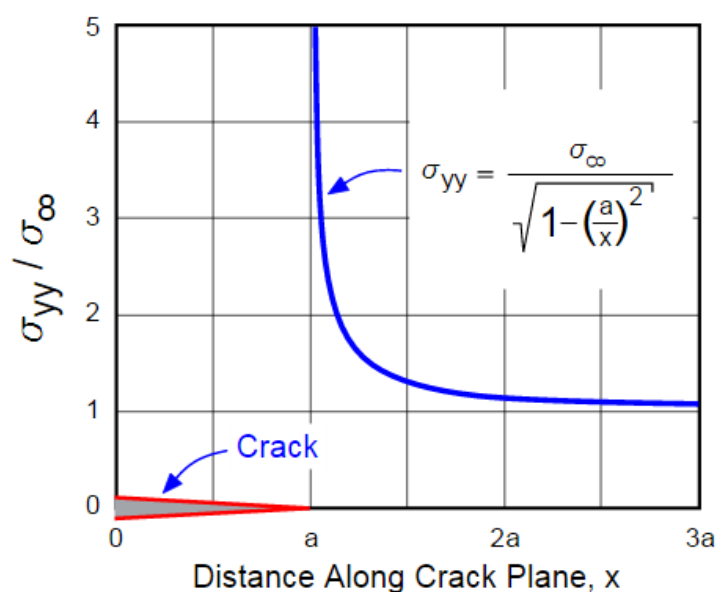
در صفحه‌ای که ترک در آن قرار دارد ($y = 0$)، $z = x$ می‌باشد، یعنی:

$$\begin{cases} -a < x < a \Rightarrow Z \text{ imaginary} \\ x < -a \text{ and } x > a \Rightarrow Z \text{ real} \end{cases} \quad (2)$$

بنابراین، تنش‌ها در صفحه ترک به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \text{Re } Z - y \text{Im } Z' \\ &= \sigma_y = \text{Re } Z + y \text{Im } Z' = \text{Re } Z \end{aligned} \quad (3)$$

$$= \begin{cases} 0; & -a < x < a \text{ (the crack)} \\ \frac{\sigma x}{\sqrt{x^2 - a^2}}; & x < -a; x > a \text{ (in front of the crack tips)} \end{cases}$$



شکل ۲: نمایش توزیع تنش در صفحه ترک مطابق با رابطه وسترگارد

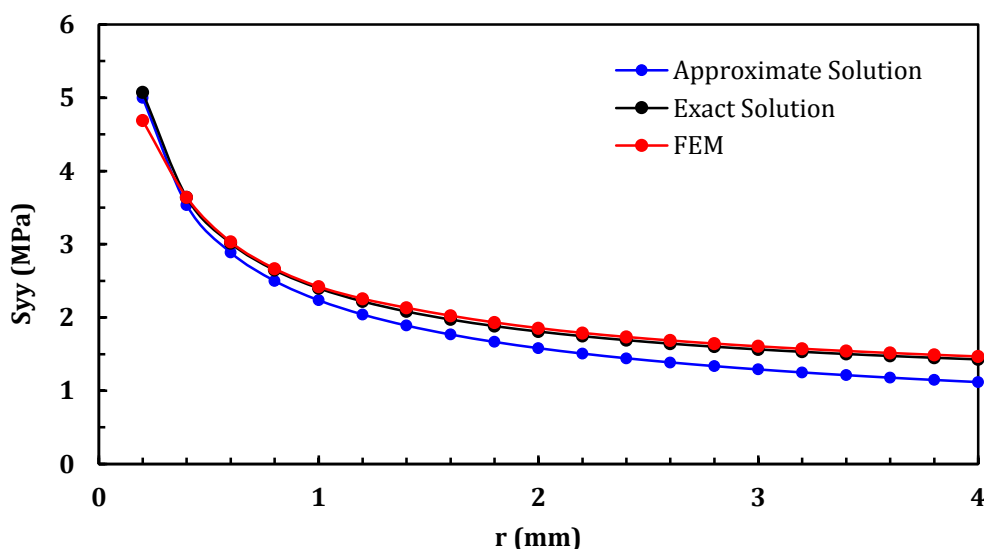
وسترگارد با انتقال دستگاه مختصات از مرکز ترک به نوک آن از روابط فوق به معادلات زیر برای محاسبه تنش در نزدیکی نوک ترک دست یافت. با توجه به اینکه این روابط با کمی تقریب از معادله ۳ استخراج شده‌اند مقادیر بدست آمده برای تنش با استفاده از این حل کمی با مقدار دقیق اختلاف دارد.

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

در این روابط K_1 ضریب شدت تنش در مد اول، r فاصله از نوک ترک و θ زاویه در نوک ترک می‌باشد. در شکل ۳ مقایسه‌ای بین منحنی‌های بدست آمده برای تنش در جلوی ترک ارائه شده است.



شکل ۳: نمایش منحنی توزیع تنش

همان طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود مقدار تنش بدست آمده از حل اجزاء محدود با رابطه تحلیلی ۳ تطابق بیشتری دارد.

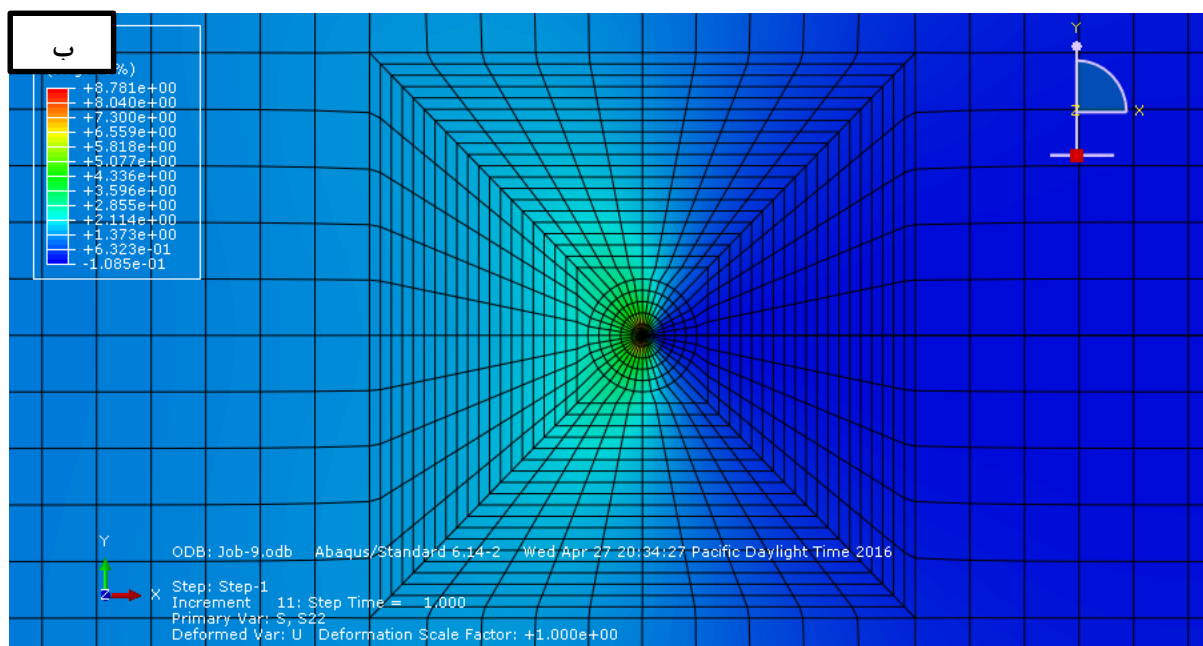
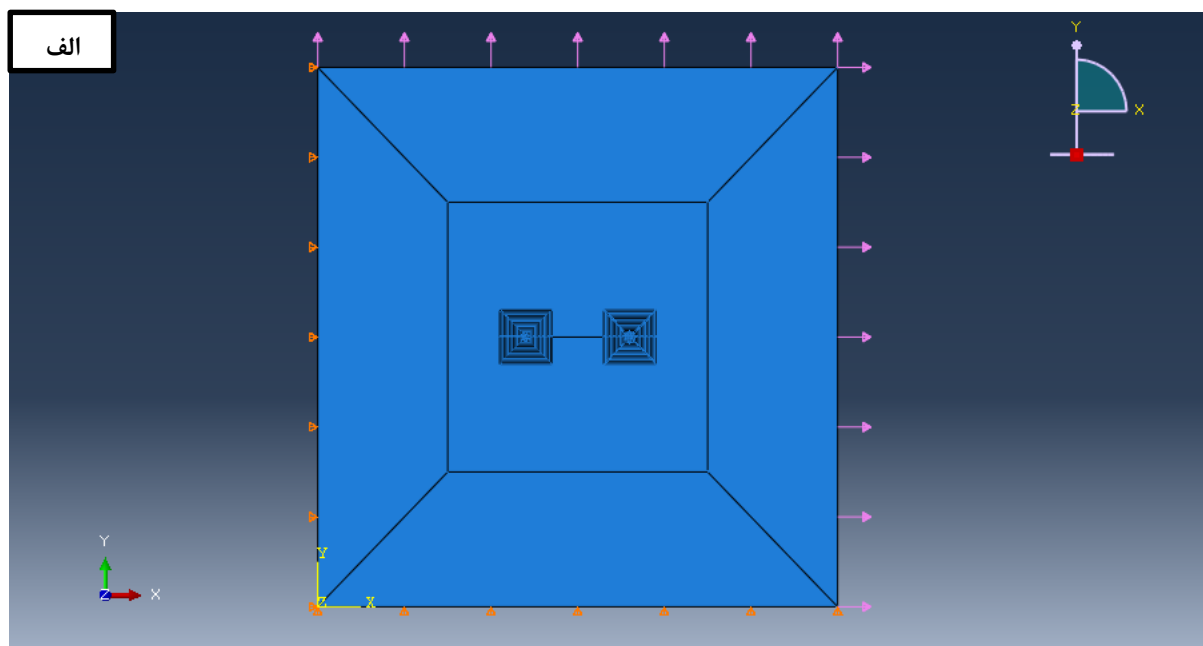
برای محاسبه تنش در نوک ترک ابتدا جدولی مطابق جدول ۱ تنظیم کرده و پارامترهای K_1 و σ_y را یک بار از روابط تحلیلی و بار دیگر از طریق نرم افزار بدست می آوریم. با توجه به این جدول مشاهده می شود که مقدار ضریب شدت تنش بدست آمده در نرم افزار آباکوس و روابط تحلیلی به یکدیگر نزدیک می باشند که این خود دلیلی بر دقت مدل سازی می باشد. نحوه محاسبه ضریب شدت تنش از حل تحلیلی به صورت زیر می باشد.

$$K_1 = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi a}$$

جدول ۱: محاسبه پارامترهای شکست و تنش (ابعاد بر حسب میلیمتر و تنش ها بر حسب مگاپاسکال می باشند)

Input Data				Westergard (1934)			ABAQUS	
a	σ_{∞}	r	Teta	K1	σ_y (Approximate)	σ_y (Exact)	K1	σ_y
10	1	0.2	0	5.60	5.00	5.07	5.75	4.68
10	1	0.4	0	5.60	3.53	3.64	5.75	3.64
10	1	0.6	0	5.60	2.88	3.01	5.75	3.03
10	1	0.8	0	5.60	2.5	2.64	5.75	2.66
10	1	1	0	5.60	2.23	2.40	5.75	2.42
10	1	1.2	0	5.60	2.04	2.22	5.75	2.25
10	1	1.4	0	5.60	1.88	2.08	5.75	2.13
10	1	1.6	0	5.60	1.76	1.97	5.75	2.02
10	1	1.8	0	5.60	1.66	1.88	5.75	1.93
10	1	2	0	5.60	1.58	1.80	5.75	1.85
10	1	2.2	0	5.60	1.50	1.74	5.75	1.78
10	1	2.4	0	5.60	1.44	1.69	5.75	1.73
10	1	2.6	0	5.60	1.38	1.64	5.75	1.68
10	1	2.8	0	5.60	1.33	1.60	5.75	1.64
10	1	3	0	5.60	1.29	1.56	5.75	1.60
10	1	3.2	0	5.60	1.25	1.53	5.75	1.57
10	1	3.4	0	5.60	1.21	1.50	5.75	1.54
10	1	3.6	0	5.60	1.17	1.47	5.75	1.51
10	1	3.8	0	5.60	1.14	1.45	5.75	1.49
10	1	4	0	5.60	1.11	1.42	5.75	1.46
10	1	4.2	0	5.60	1.09	1.40	5.75	1.44
10	1	4.4	0	5.60	1.06	1.38	5.75	1.42
10	1	4.6	0	5.60	1.04	1.37	5.75	1.41
10	1	4.8	0	5.60	1.02	1.35	5.75	1.39
10	1	5	0	5.60	1.00	1.34	5.75	1.36

« حل اجزاء محدود »



شکل ۴: نمایش بخش هایی از مدل سازی الف) بارگذاری، ب) کانتور تنش در نزدیکی نوک ترک