جلسه هفتم — بررسی خیز و توزیع تنش در یک ورق مستطیلی بسیار طویل

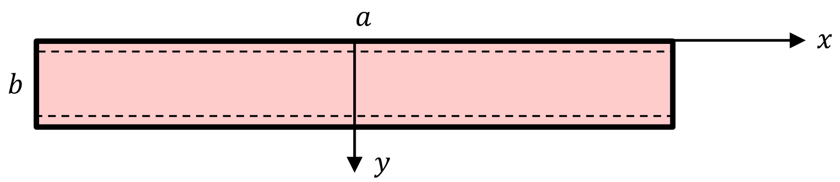
خیز و تنش را در یک ورق مستطیلی بسیار طویل و کم عرض، که به آن باریکه بینهایت می‌گویند حساب کنید. لبه‌های $y = 0$ و $y = b$ مطابق شکل ۱ روی تکیه‌گاه ساده قرار گرفته است و ورق بار غیر یکنواخت زیر را تحمل می‌کند.

$$p(y) = P_0 sin(\frac{\pi y}{b})$$

در ادامه مقدار بار را یکنواخت و برابر P_0 فرض کنید و نتایج را با حالت قبل مقایسه نمایید.

داده‌ها:

$P_0 = 10\,kPa$, $\quad b = 0.4\,m$, $\quad a = 10\,m,$ $\quad \vartheta = \frac{1}{3},$ $\quad E = 200GPa,$ $\quad t = 0.01\,m,$



شکل ۱: هندسه ورق مستطیلی طویل

Teacher: Ehsan Fathi, PHD Student in Mechanical Engineering at University of Birjand
Email: ehsanfathi_eh@yahoo.com
Websites: abaqus98.ir, catia98.ir
Tel: 09386249330

« حل تئوری »

معادلات خمش در ورق:

برای حل این ورق از رابطه گشتاور خمشی حول محور x و y استفاده می‌شود. این گشتاور به صورت زیر می‌باشد:

$$M_x=-D(\kappa_x+\nu\kappa_y)=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$M_y=-D(\kappa_y+\nu\kappa_x)=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (۱)$$
$$M_{xy}=-D(1-\nu)\kappa_{xy}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

عبارت D سختی خمشی ورق نام دارد و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$D=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (۲)$$

در این روابط D سختی خمشی ورق، E مدول یانگ، t ضخامت ورق، ϑ ضریب پواسون، w خیز و k انحنای ورق می‌باشد. مقدار D با قرار دادن مقادیر داده شده ۱۸۷۵۰ بدست می‌آید.

شرایط مرزی برای ورق با تکیه گاه ساده:

با توجه به طویل بودن ورق شیب آن پس از تغییر شکل در راستای x برابر صفر است. بنابراین داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0\ ,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

همچنین شرط مرزی در دو لبه پایینی و بالایی ورق ($y=0$ و $y=b$) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w=0\ ,\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

محاسبه خیز ورق:

با قرار دادن شرایط مرزی فوق در معادلات ۱، M_x و M_y به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$M_x=-\nu D\frac{d^2w}{dy^2}\qquad M_y=-D\frac{d^2w}{dy^2}. \qquad (۳)$$

رابطه کلی برای محاسبه خیز ورق‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^4w}{dy^4}=\frac{p}{D} \qquad (۴)$$

با چهار بار انتگرال گیری از این معادله و قرار دادن شرایط مرزی در آن می توان خیز ورق را محاسبه کرد. بنابراین داریم:

$$w=\left(\frac{b}{\pi}\right)^4\frac{p_0}{D}\sin\frac{\pi y}{b} \qquad (۵)$$

در این رابطه P_0 فشار حداکثر می‌باشد. با قرار دادن $y=b/2$ مقدار ماکزیمم خیز در وسط ورق برابر 1.40×10^{-4} بدست می‌آید.

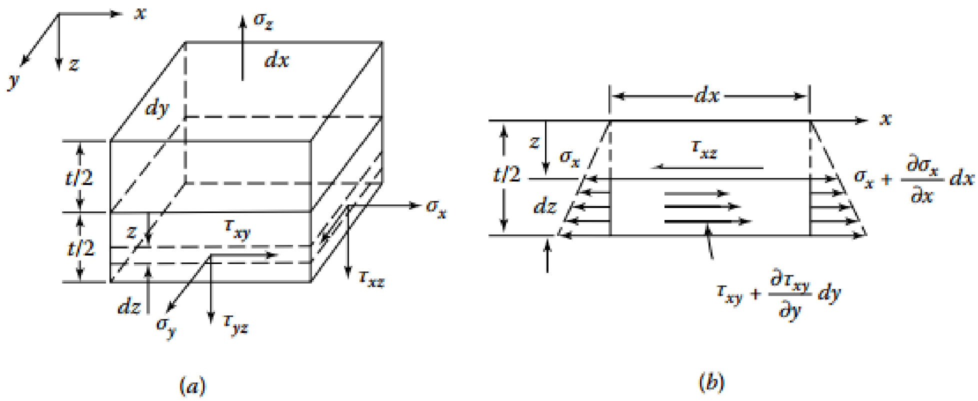
با قرار دادن معادله ۵ در ۳ می توان گشتاور خمشی را حساب کرد. از این گشتاورها در محاسبه تنش به صورت زیر استفاده می‌شود.

$$\sigma_x=\frac{12M_xz}{t^3} \qquad \sigma_y=\frac{12M_yz}{t^3} \qquad \tau_{xy}=\frac{12M_{xy}z}{t^3}. \qquad (۶)$$

با توجه به این رابطه بیشترین مقدار تنش در $z=\pm\frac{t}{2}$ رخ می‌دهد. توزیع تنش در شکل ۲ برای یک المان ورق نشان داده شده است. با قرار دادن مقدار z در معادله ۶ بیشترین مقدار تنش در وسط ورق و در سطوح آزاد بدست می‌آید:

$$\sigma_{x,\max}=0.2p_0\left(\frac{b}{t}\right)^2 \qquad \sigma_{y,\max}=0.6\,p_0\left(\frac{b}{t}\right)^2 \qquad \left(z=\frac{t}{2},y=\frac{b}{2}\right) \qquad (۷)$$

با قرار دادن مقادیر در معادله ۷، بیشترین تنش در راستای x و y به ترتیب برابر ۳,۲ و ۹,۶ مگاپاسکال در وسط ورق بدست می‌آید. این تنش ها مطابق شکل ۲ در تار خنثی یعنی $z=0$ برابر صفر می باشند.



شکل ۲: نمایش توزیع تنش در یک ورق

Teacher: Ehsan Fathi, PHD Student in Mechanical Engineering at University of Birjand
Email: ehsanfathi_eh@yahoo.com
Websites: abaqus98.ir, catia98.ir
Tel: 09386249330

همچنین، می‌توان سایر تنش‌ها را از روابط زیر محاسبه کرد.

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2t}\left[1-\left(\frac{2z}{t}\right)^2\right]$$

$$\tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2t}\left[1-\left(\frac{2z}{t}\right)^2\right] \qquad (۸)$$

$$\sigma_z = -\frac{3p}{4}\left[\frac{2}{3}-\frac{2z}{t}+\frac{1}{3}\left(\frac{2z}{t}\right)^3\right]$$

مطابق این روابط مقدار تنش σ_z در $z=-t/2$ بیشترین مقدار خود را دارد در حالیکه توزیع تنش برشی در این فاصله از تار خنثی به دلیل قرارگیری روی سطح آزاد برابر صفر خواهد بود.

$$\sigma_z = -P_0 \ , \qquad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

محاسبه خیز ورق با در نظر گرفتن بار گسترده یکنواخت:

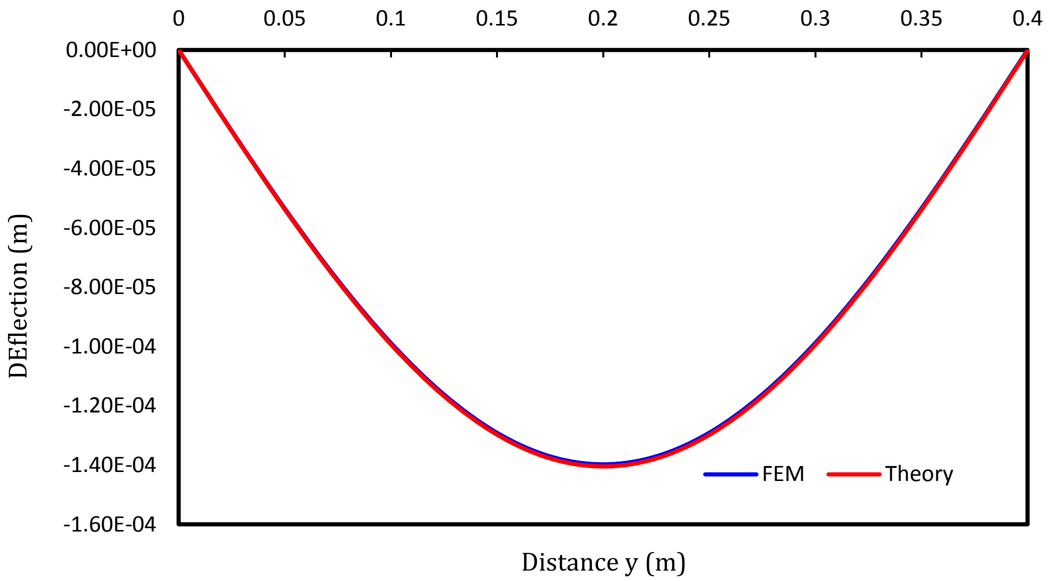
چنانچه بار ثابت و یکنواخت در نظر گرفته شود، از معادله ۴ با در نظر گرفتن $p=p_0$ چهار بار انتگرال گرفته می‌شود. در این صورت با اعمال شرایط مرزی خیز ورق به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$w = \frac{p_0 b^4}{24D}\left(\frac{y^4}{b^4}-2\frac{y^3}{b^3}+\frac{y}{b}\right) \qquad (۹)$$

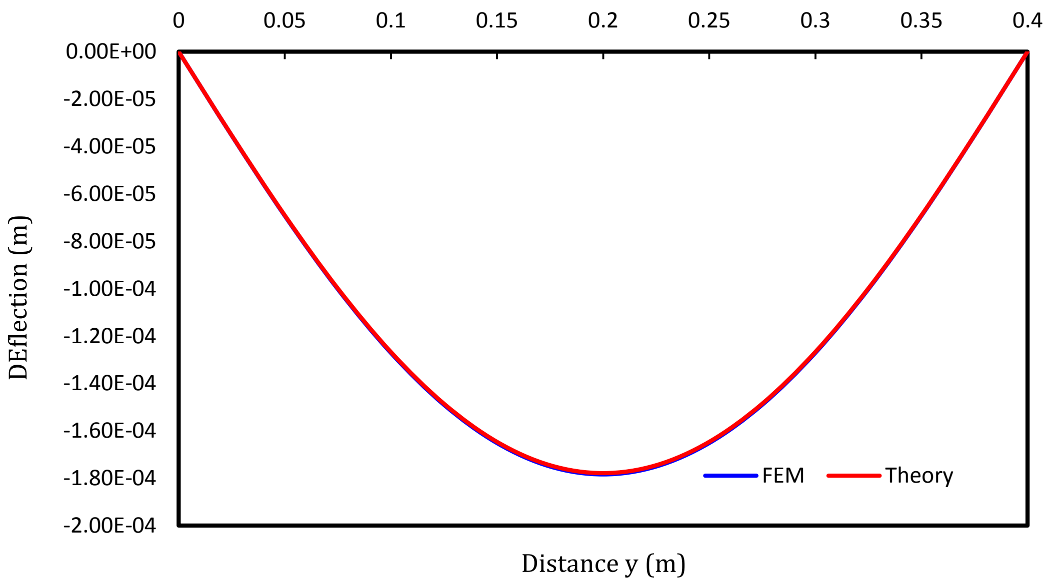
در رابطه فوق با قرار دادن $y=\frac{b}{2}$ بیشترین مقدار خیز در وسط ورق بدست می‌آید.

$$w_{max} = \frac{5p_0b^4}{384D} = 1.70\times10^{-4}\ m$$

« مقایسه نتایج تئوری و عددی »



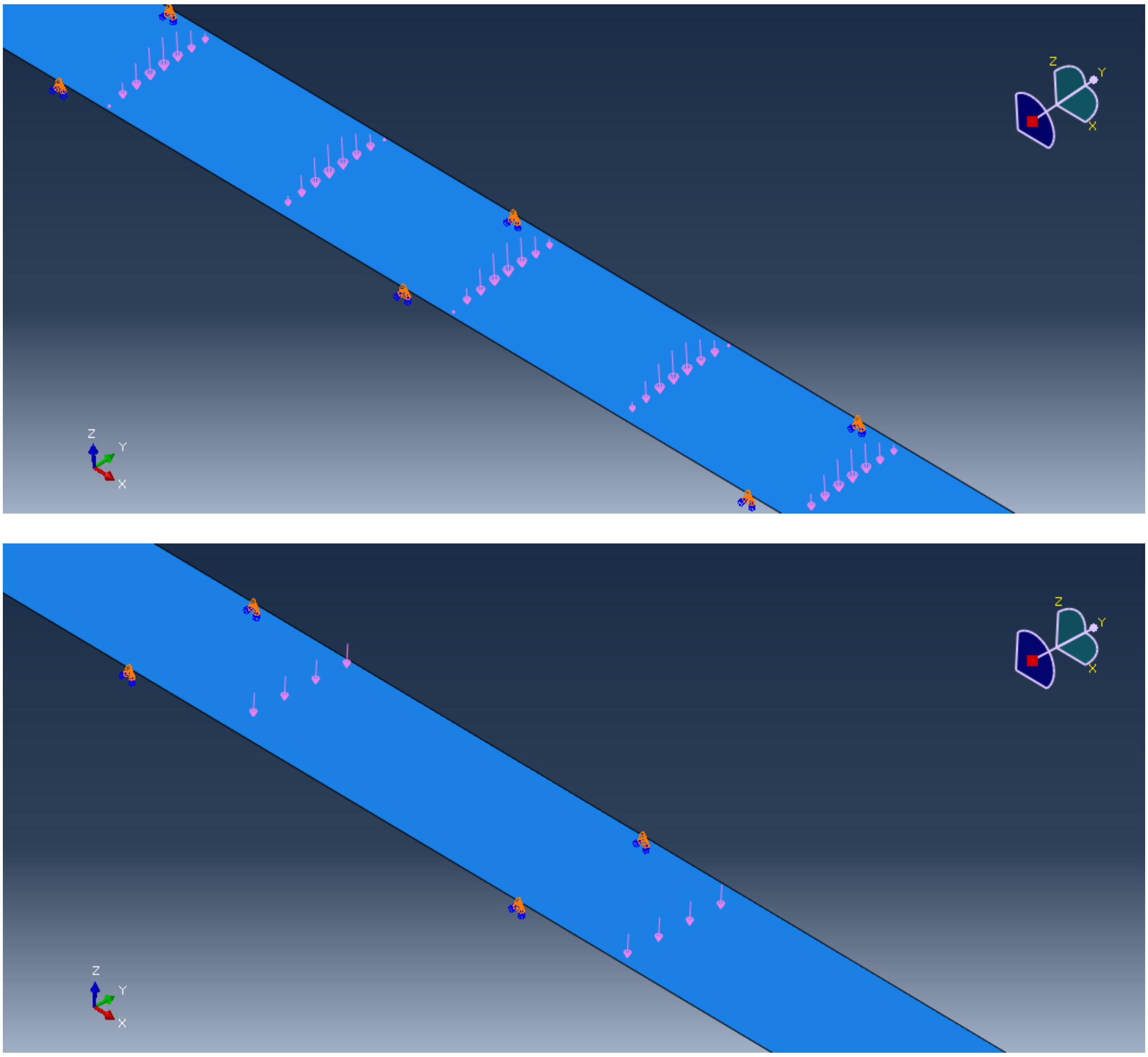
شکل ۳: مقایسه منحنی خیز تیر در راستای محور y برای بارگذاری سینوسی



شکل ۴: مقایسه منحنی خیز تیر در راستای محور y برای بارگذاری یکنواخت

Teacher: Ehsan Fathi, PHD Student in Mechanical Engineering at University of Birjand
Email: ehsanfathi_eh@yahoo.com
Websites: abaqus98.ir, catia98.ir
Tel: 09386249330

« حل اجزاء محدود »



شکل ۵: نمایش بارگذاری الف) بارگذاری سینوسی، ب) بارگذاری یکنواخت

Teacher: Ehsan Fathi, PHD Student in Mechanical Engineering at University of Birjand
Email: ehsanfathi_eh@yahoo.com
Websites: abaqus98.ir, catia98.ir
Tel: 09386249330