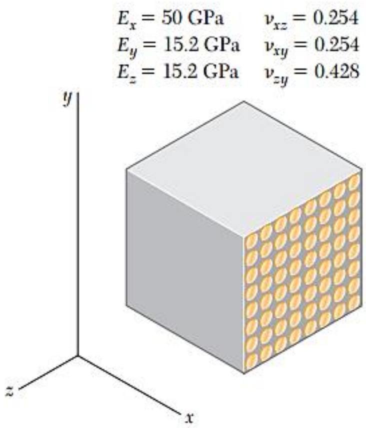
جلسه هفدهم — تحلیل تنش در مکعب کامپوزیتی

در شکل زیر، مکعب کامپوزیتی به ابعاد ۴۰ میلیمتر در راستای x تقویت شده است. با فرض اینکه این مکعب در دو راستای y و z مقید بوده و در راستای x تحت بار کششی ۶۵ کیلونیوتن قرار می‌گیرد، تغییرمکان در راستای x و تنش‌ها را در سه جهت حساب کنید. سپس این مسئله را با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مدل کرده و نتایج را با مقدار بدست آمده از حل تئوری مقایسه نمایید.



Teacher: Ehsan Fathi, PHD Student in Mechanical Engineering at University of Birjand
Email: ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: abaqus98.ir
Tel: 09386249330

« حل تئوری »

برای درک بهتر روابط تئوری نیاز به مقدمه‌ای در خصوص کامپوزیت‌ها می‌باشد که در زیر به آن اشاره شده است.

۱. رابطه تنش برحسب کرنش الاستیک کل (Hook Law):

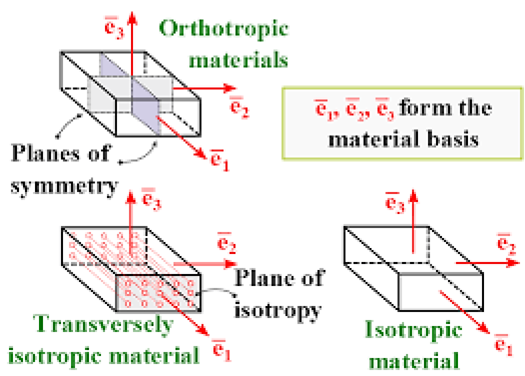
$$\sigma = D^{el}\varepsilon^{el}$$

در این رابطه σ تنش کل (تانسور تنش کوشی در مسائل با تغییرشکل محدود)، D^{el} تانسور الاستیسیته مرتبه چهارم و ε^{el} کرنش الاستیک کل می‌باشد.

تذکر: این رابطه برای کرنش‌های کمتر از ۵ درصد قابل استفاده است. در کرنش‌های بالاتر از ماده با خواص هایپر الاستیک باید استفاده شود.

۲. انواع ماده از نظر تقارن:

بسته به تعداد صفحات موجود برای خواص الاستیک، یک ماده را می‌توان به دسته‌های مختلفی (Isotropic، Ortotropic، Anisotropic و ...). تقسیم بندی کرد. شکل زیر چند ماده مختلف را نشان می‌دهد.



Teacher: Ehsan Fathi, PHD Student in Mechanical Engineering at University of Birjand
Email: ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: abaqus98.ir
Tel: 09386249330

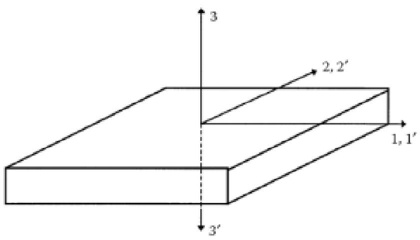
الف) قانون هوک برای مواد غیر ایزوتروپیک (Anisotropic Materials):

به دلیل اینکه هیچ گونه تقارنی در این ماده نمی‌باشد، ماتریس سختی در این ماده دارای ۲۱ ثابت است که هریک جداگانه می‌بایست تعریف شود. برای حالت تنش صفحه تنش در راستای ۳ به صورت پیش‌فرض صفر در نظر گرفته شده و ثوابت ماتریس کاهش پیدا می‌کنند. این مواد اگر تحت بار محوری قرار گیرند تنش برشی در آن‌ها به وجود خواهد آمد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1113} & D_{1123} \\ & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2213} & D_{2223} \\ & & D_{3333} & D_{3312} & D_{3313} & D_{3323} \\ & & & D_{1212} & D_{1213} & D_{1223} \\ & sym & & & D_{1313} & D_{1323} \\ & & & & & D_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = [D^{el}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}.$$

ب) قانون هوک برای مواد منوکلینیک (Monoclinic Materials):

اگر تقویت کننده‌ها در دو راستا قرار گرفته باشند در این صورت فقط یک صفحه تقارن وجود خواهد داشت و آن صفحه‌ای است که تقویت کننده‌ها در آن قرار گرفته‌اند. در شکل زیر صفحه xy همان صفحه تقارن است که نرمال آن جهت ۳ می باشد. در مواد منوکلینیک تعداد ثوابت ۱۳ می‌باشد.

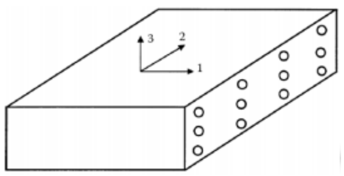


$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

Teacher: Ehsan Fathi, PHD Student in Mechanical Engineering at University of Birjand
Email: ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: abaqus98.ir
Tel: 09386249330

ج) قانون هوک برای مواد ارتوتروپیک (Orthotropic Materials):

ماده با خواص ارتوتروپیک دارای ۲ صفحه تقارن می‌باشد. در این مواد فیبرها در یک جهت قرار می‌گیرند در نتیجه ثوابت ماتریس سختی از ۲۱ به ۹ کاهش پیدا می‌کند. در این مواد هیچ ارتباطی بن تنش‌های نرمال و کرنش های برشی وجود ندارد. یعنی اگر این مواد در سه جهت کشیده شوند هیچ تنش برشی در آن‌ها به وجود نخواهد آمد.



$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0\\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}$$

خواص ارتوتروپیک در حالت تنش صفحه‌ای:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 0\\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0\\ 0 & 0 & 1/G_{12}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

د) خواص ارتوتروپیک با وارد کردن ثوابت مهندسی (Engineering Constant):

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{23}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0\\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0\\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{Bmatrix}$$

$$G_{12}=\frac{E_1}{2(1+\vartheta_{12})}\ ,\qquad G_{13}=\frac{E_1}{2(1+\vartheta_{13})}\ ,\qquad G_{23}=\frac{E_2}{2(1+\vartheta_{23})}$$

$$Prove:\ \frac{1}{G_{12}}=2\left(\frac{1}{E_1}+\frac{\vartheta_{21}}{E_2}\right)=2\left(\frac{1}{E_1}+\frac{\vartheta_{12}}{E_1}\right)=\frac{2(1+\vartheta_{12})}{E_1}\ \rightarrow\ G_{12}=\frac{E_1}{2(1+\vartheta_{12})}$$

Teacher: Ehsan Fathi, PHD Student in Mechanical Engineering at University of Birjand
Email: ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: abaqus98.ir
Tel: 09386249330

ه) خواص آیزوتروپیک عرضی (Transversely Isotropic Materials):

یک حالت خاص از خواص ارتوتروپیک می‌باشد که در آن یک صفحه به عنوان صفحه آیزوتروپیک (صفحه‌ای که خواص در آن تغییر نمی‌کند) شناخته می‌شود. این خواص در نرم‌افزار آباکوس در بخش ثوابت مهندسی یا خواص ارتوتروپیک وارد می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_p & -\nu_p/E_p & -\nu_{tp}/E_t & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_p/E_p & 1/E_p & -\nu_{tp}/E_t & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{pt}/E_p & -\nu_{pt}/E_p & 1/E_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

و) خواص آیزوتروپیک (Isotropic Materials):

ماده آیزوتروپیک دارای بیشمار صفحه تقارن می‌باشد. یعنی خواص در راستاهای مختلف یکسان بوده و تغییر نمی‌کند.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

۳. حل تئوری مسئله:

با استفاده از ماتریس ارائه شده در بخش «د» برای ثوابت مهندسی می‌توان رابطه کرنش بر حسب تنش را به صورت زیر نوشت:

$$1.\,\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E_x}-\frac{\vartheta_{yx}\sigma_y}{E_y}-\frac{\vartheta_{zx}\sigma_z}{E_z},\quad 2.\,\varepsilon_y=\frac{\sigma_y}{E_y}-\frac{\vartheta_{xy}\sigma_x}{E_x}-\frac{\vartheta_{zy}\sigma_z}{E_z},\qquad 3.\ \varepsilon_z=\frac{\sigma_z}{E_z}-\frac{\vartheta_{xz}\sigma_x}{E_x}-\frac{\vartheta_{yz}\sigma_y}{E_y}$$

به دلیل تقارن مسئله سه رابطه دیگر به روابط فوق مطابق زیر اضافه می‌شود:

$$4.\frac{\vartheta_{yx}}{E_y}=\frac{\vartheta_{xy}}{E_x}\quad,\qquad 5.\frac{\vartheta_{zx}}{E_z}=\frac{\vartheta_{xz}}{E_x}\quad,\qquad 6.\frac{\vartheta_{zy}}{E_z}=\frac{\vartheta_{yz}}{E_y}$$

با توجه به بسته بودن مکعب در دو راستای y و z، کرنش در این دو جهت صفر است. بنابراین، داریم:

$$\frac{\sigma_y}{E_y}-\frac{\vartheta_{xy}\sigma_x}{E_x}-\frac{\vartheta_{zy}\sigma_z}{E_z}=0\ \rightarrow\ \sigma_y-0.428\sigma_z=0.077\sigma_x\quad(7)$$

$$\frac{\sigma_z}{E_z}-\frac{\vartheta_{xz}\sigma_x}{E_x}-\frac{\vartheta_{yz}\sigma_y}{E_y}=0\ \rightarrow\ -0.428\sigma_y+\sigma_z=0.077\sigma_x\quad(8)$$

از حل دو معادله فوق مقدار تنش در راستای y و z به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_y=\sigma_z=0.134\sigma_x\quad(9)$$

با قرار دادن روابط فوق در معادله ۱ می‌توان مقدار کرنش را بدست آورد. مقدار تنش در راستای x از تقسیم نیروی ۶۵۰۰۰ نیوتن بر سطح مقطع ۱۶۰۰ میلی‌متر مربعی برابر ۴۰/۶۲۵ مگاپاسکال بدست آمده است. با قرار دادن این مقدار در رابطه ۹ مقدار تنش در دو راستای دیگر برابر ۵/۴۸ مگاپاسکال بدست می‌آید.

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E_x}-\frac{\vartheta_{yx}\sigma_y}{E_y}-\frac{\vartheta_{zx}\sigma_z}{E_z}=756.78\times10^{-6}\ \rightarrow\ \delta=L\varepsilon_x=0.0303\,mm$$

تذکر ۱: همان‌طور که مشخص است مقدار کرنش از ۵ درصد کمتر بوده پس می‌توان مسئله را با فرض الاستیک خطی در نرم‌افزار آباکوس حل و نتایج را با این مقدار مقایسه کرد.

Teacher: Ehsan Fathi, PHD Student in Mechanical Engineering at University of Birjand
Email: ehsanfathi_eh@yahoo.com
Website: abaqus98.ir
Tel: 09386249330