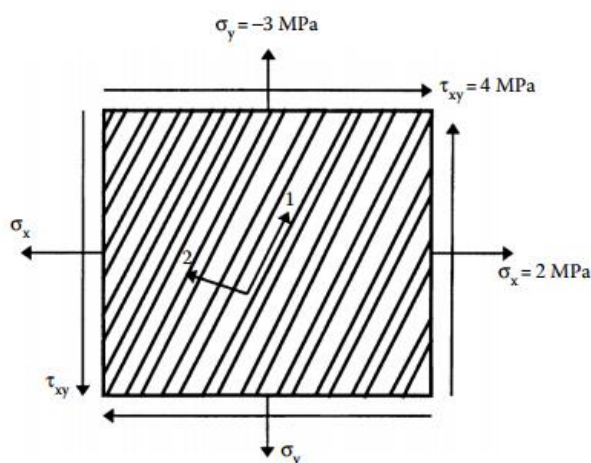


جلسه نوزدهم تحلیل تنش در گرافیت / اپوکسی تقویت شده در جهت مایل

برای گرافیت / اپوکسی نشان داده شده در شکل زیر مطلوب است:

- ۱- ماتریس نرمی انتقالی (Transformed Compliance Matrix)
 - ۲- ماتریس سختی کاهش یافته انتقالی (Transformed Reduced Stiffness Matrix)
 - ۳- کرنش‌های کلی (Global Strains)
 - ۴- کرنش‌های محلی (Local Strains)
 - ۵- تنش‌های محلی (Local Stress)
 - ۶- تنش‌های اصلی (Principal Stresses)
 - ۷- تنش برشی ماکزیمم (Maximum Shear Stress)
 - ۸- کرنش‌های اصلی (Principal Strains)
 - ۹- بیشترین کرنش برشی (Maximum Shear Strain)
- در ادامه مسئله را با نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس مدل کرده و نتایج را با مقدار تئوری مقایسه نمایید. ابعاد ورق را ۱۰۰ میلیمتر و شرایط را تنش صفحه‌ای در نظر بگیرید.



جدول ۱: خواص مکانیکی لمینیت یک جهته در سیستم SI

| Property | Symbol | Units | Glass/ epoxy | Boron/ epoxy | Graphite/ epoxy |
|--|----------------------|---|-----------------|-----------------|--------------------|
| Fiber volume fraction | V_f | | 0.45 | 0.50 | 0.70 |
| Longitudinal elastic modulus | E_1 | GPa | 38.6 | 204 | 181 |
| Transverse elastic modulus | E_2 | GPa | 8.27 | 18.50 | 10.30 |
| Major Poisson's ratio | ν_{12} | | 0.26 | 0.23 | 0.28 |
| Shear modulus | G_{12} | GPa | 4.14 | 5.59 | 7.17 |
| Ultimate longitudinal tensile strength | $(\sigma_1^T)_{ult}$ | MPa | 1062 | 1260 | 1500 |
| Ultimate longitudinal compressive strength | $(\sigma_1^C)_{ult}$ | MPa | 610 | 2500 | 1500 |
| Ultimate transverse tensile strength | $(\sigma_2^T)_{ult}$ | MPa | 31 | 61 | 40 |
| Ultimate transverse compressive strength | $(\sigma_2^C)_{ult}$ | MPa | 118 | 202 | 246 |
| Ultimate in-plane shear strength | $(\tau_{12})_{ult}$ | MPa | 72 | 67 | 68 |
| Longitudinal coefficient of thermal expansion | α_1 | $\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$ | 8.6 | 6.1 | 0.02 |
| Transverse coefficient of thermal expansion | α_2 | $\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$ | 22.1 | 30.3 | 22.5 |
| Longitudinal coefficient of moisture expansion | β_1 | $\text{m}/\text{m}/\text{kg}/\text{kg}$ | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Transverse coefficient of moisture expansion | β_2 | $\text{m}/\text{m}/\text{kg}/\text{kg}$ | 0.60 | 0.60 | 0.60 |

قانون هوک برای حالت تنش صفحه‌ای:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

« حل تئوری »

۱- محاسبه ماتریس نرمی:

با استفاده از جدول ارائه شده با در اختیار داشتن مقادیر E_1 ، E_2 ، ν_{12} و G_{12} می توان ضرایب ماتریس نرمی را بدست آورد. این مقادیر به صورت زیر می باشند:

$$E_1 = 181 \text{ GPa}, E_2 = 10.3 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.28, G_{12} = 7.17 \text{ GPa}.$$

با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه هوک برای مواد تنش صفحه ای، ضرایب ماتریس نرمی به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$S_{11} = \frac{1}{181 \times 10^9} = 0.5525 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}, \quad S_{12} = -\frac{0.28}{181 \times 10^9} = -0.1547 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{22} = \frac{1}{10.3 \times 10^9} = 0.9709 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}, \quad S_{66} = \frac{1}{7.17 \times 10^9} = 0.1395 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}.$$

با استفاده از روابط ماتریس انتقال می توان ضرایب ماتریس نرمی انتقال یافته را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\bar{S}_{11} = S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4,$$

$$\bar{S}_{12} = S_{12}(s^4 + c^4) + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2,$$

$$\bar{S}_{22} = S_{11}s^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}c^4,$$

$$\bar{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})s^3c,$$

$$\bar{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})s^3c - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})sc^3,$$

$$\bar{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})s^2c^2 + S_{66}(s^4 + c^4).$$

در این روابط C کسینوس و S سینوس می باشد که برای زاویه ۶۰ درجه به ترتیب ۰/۵۰۰ و ۰/۸۶۶ می باشد.

.....
Teacher: Ehsan Fathi, PHD Student in Mechanical Engineering at University of Birjand

Email: ehsanfathi_eh@yahoo.com

Website: abaqus98.ir

Tel: 09386249330

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= 0.5525 \times 10^{-11} (0.500)^4 + [2(-0.1547 \times 10^{-11}) \\ &+ 0.1395 \times 10^{-9}] (0.866)^2 (0.5)^2 + 0.9709 \times 10^{-10} (0.866)^4 \\ &= 0.8053 \times 10^{-10} \frac{1}{Pa} \\ \bar{S}_{12} &= -0.7878 \times 10^{-11} \frac{1}{Pa}, \\ \bar{S}_{16} &= -0.3234 \times 10^{-10} \frac{1}{Pa}, \\ \bar{S}_{22} &= 0.3475 \times 10^{-10} \frac{1}{Pa}, \\ \bar{S}_{26} &= -0.4696 \times 10^{-10} \frac{1}{Pa}, \\ \bar{S}_{66} &= 0.1141 \times 10^{-9} \frac{1}{Pa}. \end{aligned}$$

۲- با گرفتن معکوس از ماتریس نرمی انتقالی $[\bar{S}]$ می توان ماتریس سختی کاهش یافته $[\bar{Q}]$ را محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} [\bar{Q}] &= \begin{bmatrix} 0.8053 \times 10^{-10} & -0.7878 \times 10^{-11} & -0.3234 \times 10^{-10} \\ -0.7878 \times 10^{-11} & 0.3475 \times 10^{-10} & -0.4696 \times 10^{-10} \\ -0.3234 \times 10^{-10} & -0.4696 \times 10^{-10} & 0.1141 \times 10^{-9} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0.2365 \times 10^{11} & 0.3246 \times 10^{11} & 0.2005 \times 10^{11} \\ 0.3246 \times 10^{11} & 0.1094 \times 10^{12} & 0.5419 \times 10^{11} \\ 0.2005 \times 10^{11} & 0.5419 \times 10^{11} & 0.3674 \times 10^{11} \end{bmatrix} Pa. \end{aligned}$$

۳- محاسبه کرنش‌های کلی:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8053 \times 10^{-10} & -0.7878 \times 10^{-11} & -0.3234 \times 10^{-10} \\ -0.7878 \times 10^{-11} & 0.3475 \times 10^{-10} & -0.4696 \times 10^{-10} \\ -0.3234 \times 10^{-10} & -0.4696 \times 10^{-10} & 0.1141 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \times 10^6 \\ -3 \times 10^6 \\ 4 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5534 \times 10^{-4} \\ -0.3078 \times 10^{-3} \\ 0.5328 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

۴- محاسبه کرنش‌های محلی:

با استفاده از ماتریس انتقال می‌توان رابطه بین کرنش‌های کلی و محلی را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix},$$

رابطه فوق برابر صفر می‌باشد که در آن T ماتریس انتقال است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix},$$

بنابراین، با استفاده از روابط فوق کرنش‌های محلی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.7500 & 0.8660 \\ 0.7500 & 0.2500 & -0.8660 \\ -0.4330 & 0.4330 & -0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5534 \times 10^{-4} \\ -0.3078 \times 10^{-3} \\ 0.5328 \times 10^{-3} / 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1367 \times 10^{-4} \\ -0.2662 \times 10^{-3} \\ -0.5809 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

۵- محاسبه تنش‌های محلی:

با استفاده از روابط ارائه شده در زیر می‌توان تنش‌های محلی را برحسب تنش‌های اصلی بدست آورد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad [T]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.7500 & 0.8660 \\ 0.7500 & 0.2500 & -0.8660 \\ -0.4330 & 0.4330 & -0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \times 10^6 \\ -3 \times 10^6 \\ 4 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1714 \times 10^7 \\ -0.2714 \times 10^7 \\ -0.4165 \times 10^7 \end{bmatrix} Pa.$$

۶- محاسبه تنش‌های اصلی:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{2 \times 10^6 - 3 \times 10^6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2 \times 10^6 + 3 \times 10^6}{2}\right)^2 + (4 \times 10^6)^2}$$

$$= 4.217, -5.217 MPa.$$

همچنین، زاویه‌ای که در آن بیشترین تنش اتفاق می‌افتد به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2(4 \times 10^6)}{2 \times 10^6 + 3 \times 10^6} \right)$$

$$= 29.00^\circ .$$

۷- محاسبه تنش برشی ماکزیمم:

مقدار تنش برشی ماکزیمم نصف مقدار تنش ترسکا می باشد که به صورت قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 \times 10^6 - 3 \times 10^6}{2}\right)^2 + (4 \times 10^6)^2} \\ &= 4.717 \text{ MPa.}\end{aligned}$$

همچنین، زاویه ای که در آن بیشترین تنش برشی اتفاق می افتد به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}\theta_s &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(-\frac{2 \times 10^6 + 3 \times 10^6}{2(4 \times 10^6)} \right) \\ &= 16.00^\circ\end{aligned}$$

۸- محاسبه کرنش های اصلی:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\max, \min} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{0.5534 \times 10^{-4} + 0.3078 \times 10^{-3}}{2} \\ &\quad \pm \sqrt{\left(\frac{0.5534 \times 10^{-4} + 0.3078 \times 10^{-3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.5328 \times 10^{-3}}{2}\right)^2} \\ &= 1.962 \times 10^{-4}, -4.486 \times 10^{-4}.\end{aligned}$$

.....
Teacher: Ehsan Fathi, PHD Student in Mechanical Engineering at University of Birjand

Email: ehsanfathi_eh@yahoo.com

Website: abaqus98.ir

Tel: 09386249330

زاویه‌ای که در آن کرنش‌های اصلی نرمال به وجود می‌آیند به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\theta_p &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{0.5328 \times 10^{-3}}{0.5534 \times 10^{-4} + 0.3078 \times 10^{-3}} \right) \\ &= 27.86^\circ.\end{aligned}$$

۹- محاسبه کرنش برشی ماکزیمم:

$$\begin{aligned}\gamma_{\max} &= \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ &= \sqrt{(0.5534 \times 10^{-4} + 0.3078 \times 10^{-3})^2 + (0.532 \times 10^{-3})^2} \\ &= 6.448 \times 10^{-4}.\end{aligned}$$

زاویه‌ای که در آن کرنش برشی ماکزیمم اتفاق می‌افتد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\theta_s &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(-\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(-\frac{0.5534 \times 10^{-4} + 0.3078 \times 10^{-3}}{0.5328 \times 10^{-3}} \right) \\ &= -17.14^\circ.\end{aligned}$$