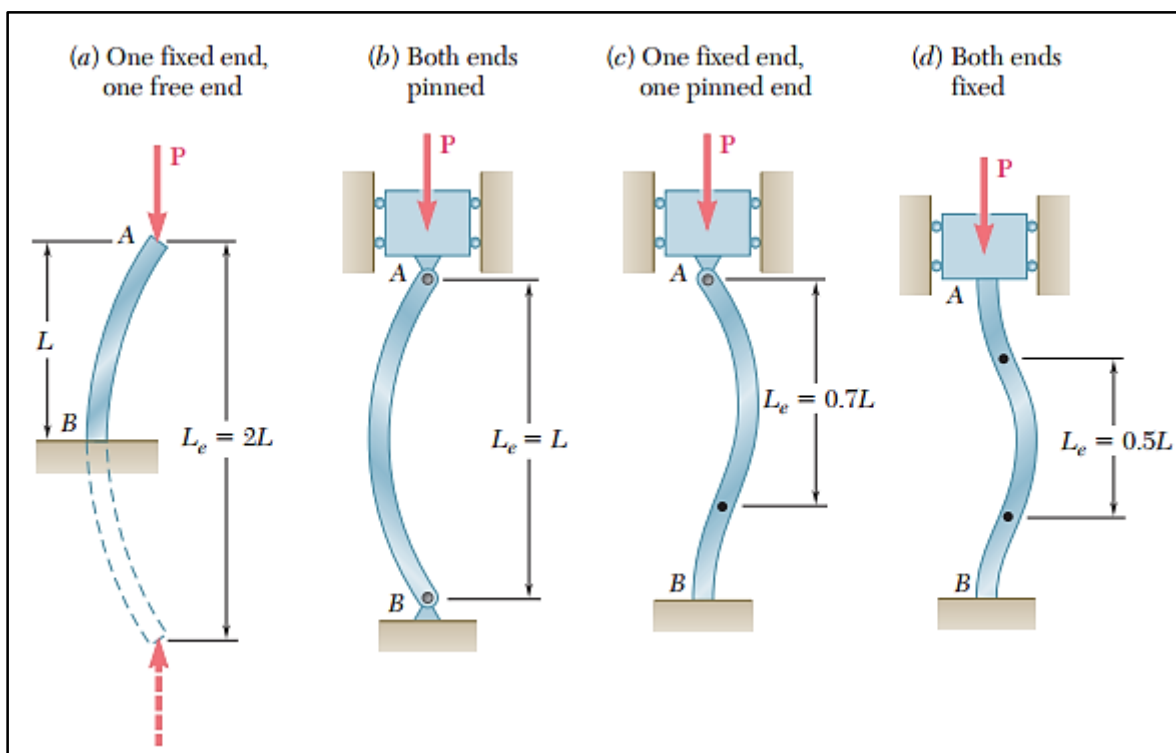


تحلیل کمانش ستون

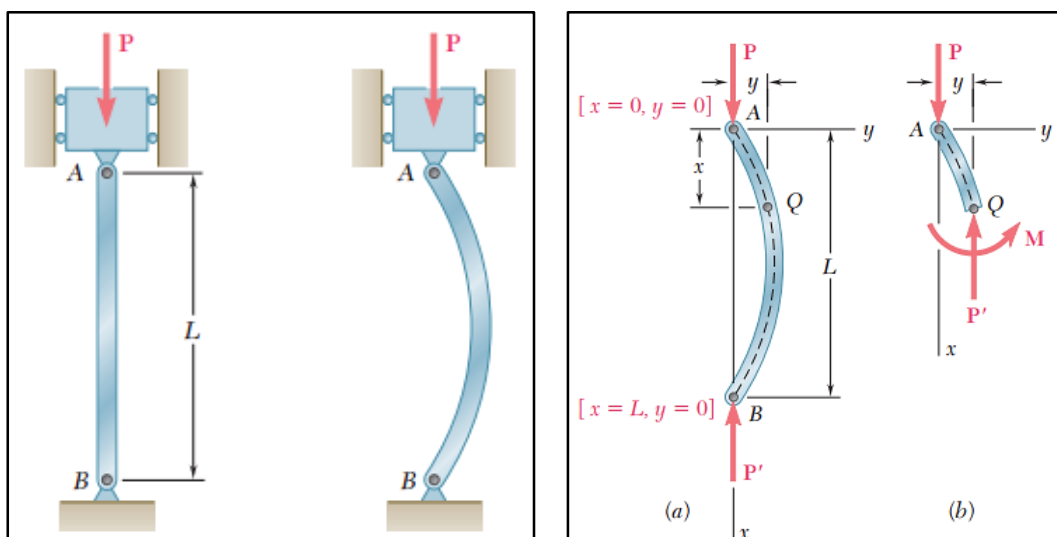
جلسه بیست و ششم

در تمامی ستون‌های زیر مقدار نیرو و تنش بحرانی را بدست آورده و مقدار تئوری را با نرم افزار آباکوس مقایسه نمایید. مدول یانگ ۲۰۰ گیگاپاسکال، طول هر ستون ۱ متر و شعاع آن ۰/۱ در نظر گرفته شود.



« حل تئوری »

با توجه به اینکه ستون‌ها هم مانند تیرهایی هستند که به صورت عمودی و تحت بار فشاری قرار گرفته‌اند می‌توان برای محاسبه مقدار بار بحرانی از روابط خیز تیرها استفاده کرد.



رابطه ممان خمشی در تیرها به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y$$

با مرتب سازی معادله فوق خواهیم داشت:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه ۲ است که برای حل آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$p^2 = \frac{P}{EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0$$

حل کلی معادله صفحه قبل به صورت زیر می باشد:

$$y = A \sin px + B \cos px$$

با قرار دادن این معادله در رابطه اصلی و در نظر گرفتن شرایط مرزی مقدار بار بحرانی بدست می آیند. از شرط مرزی در ابتدای ستون  $(x = 0, y = 0)$  ثابت  $B$  صفر بدست می آید و از شرط مرزی دوم در انتهای ستون  $(x = L, y = 0)$  به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$A \sin pL = 0$$

در این رابطه یا باید  $A$  صفر باشد که در این صورت به جواب بدیهی می رسیم یا اینکه عبارت داخل سینوس برابر صفر باشد که در این صورت مقدار بار به صورت زیر بدست می آید:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

با قرار دادن  $n = 1$  در رابطه فوق مقدار بار بحرانی در مد اول به صورت زیر بدست می آید که به آن معادله اولر نیز گفته می شود:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

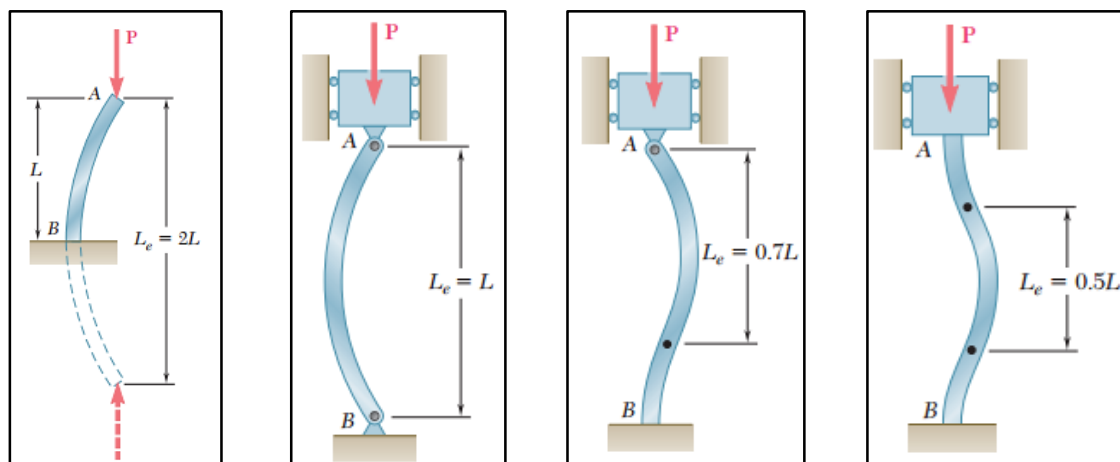
با قرار دادن ثابت های بدست آمده در معادله  $y$  می توان مقدار تغییر طول تیر را به صورت زیر بدست آورد:

$$y = A \sin \frac{\pi x}{L}$$

در ادامه می توان با تقسیم نیروی بحرانی بر سطح مقطع ستون مقدار تنش بحرانی را بدست آورد:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EA r^2}{AL^2}$$

**توجه:** روابط نیرو و تنش برای ستون با شرایط مرزی دو سر پین می باشد. برای تعمیم این روابط در شرایط مرزی مختلف می بایست به جای طول تیر  $L$  از طول تیر معادل  $L_e$  استفاده کرد. مقدار طول تیر معادل برای شرایط مرزی مختلف به صورت زیر می باشد:



۱- یک سر آزاد - یک سر گیردار:  $L_e = 2L$

$$I = \frac{\pi c^4}{4} = 7.853 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \cdot (200 \times 10^9) \cdot (7.853 \times 10^{-5})}{4} = 0.387 \times 10^8 \text{ N}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{0.387 \times 10^8}{0.0314} = 1.232 \times 10^9 \text{ Pa}$$

۲- دو سر پین:  $L_e = L$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \cdot (200 \times 10^9) \cdot (7.853 \times 10^{-5})}{1} = 1.550 \times 10^8 \text{ N}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{1.550 \times 10^8}{0.0314} = 4.936 \times 10^9 \text{ Pa}$$

۳- یک سر پین - یک سر گیردار:  $L_e = 0.7L$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \cdot (200 \times 10^9) \cdot (7.853 \times 10^{-5})}{0.49} = 3.163 \times 10^8 \text{ N}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{3.163 \times 10^8}{0.0314} = 1.007 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

۴- دو سر گیردار:  $L_e = 0.5L$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \cdot (200 \times 10^9) \cdot (7.853 \times 10^{-5})}{0.25} = 6.20 \times 10^8 \text{ N}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{6.20 \times 10^8}{0.0314} = 1.970 \times 10^{10} \text{ Pa}$$